

مجموع جملات دنباله فیبوناچی



اشاره

در بحث معرفی دنباله‌ها، بعد از پیدا کردن جمله عمومی دنباله (در صورت وجود)، بلافاصله این موضوع مطرح می‌شود که چگونه می‌توان مجموع جملات یک دنباله را به‌دست آورد. در خصوص «دنباله فیبوناچی» نیز این سؤال مطرح است که: آیا می‌توان مجموع جملات آن را حساب کرد؟ و در صورتی که این عمل امکان‌پذیر باشد، از چه رابطه‌ای می‌توان مجموع n جمله اول را به‌دست آورد؟ جواب این سؤال مثبت است. یعنی می‌توان فرمولی ارائه کرد که به کمک آن، مجموع جملات یک دنباله فیبوناچی را به‌دست آورد. در ادامه دنباله مذکور را به‌طور مختصر معرفی و فرمول مدنظر را بیان می‌کنیم.

تعریف رابطه بازگشتی (دنباله بازگشتی)

در بسیاری از دنباله‌ها بین هر جمله و جمله قبل (جملات قبل) از آن رابطه‌ای برقرار است. به این نوع دنباله‌ها، دنباله بازگشتی گویند.

مثال ۱. در دنباله اعداد طبیعی رابطه بازگشتی به‌صورت $t_n = t_{n-1} + 1$ است.

■ **تعریف اول دنباله فیبوناچی:** دنباله‌ای که جمله اول و دوم آن برابر یک است و هر جمله پس از آن‌ها از مجموع دو جمله قبل به‌دست آید. رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی به‌صورت مقابل است:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases} \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

■ **تعریف دوم دنباله فیبوناچی:** در بعضی از تعریف‌ها صفر را هم جزو اعداد دنباله فیبوناچی به‌حساب می‌آورند و دنباله فیبوناچی را دنباله‌ای تعریف می‌کنند که هر جمله آن برابر است با مجموع دو جمله قبل از آن. رابطه بازگشتی این تعریف به شکل زیر است:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } n = 1 \\ 1, & \text{اگر } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{اگر } n > 2 \end{cases} \Rightarrow 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

الف) روش محاسبه مجموع جملات دنباله فیبوناچی

اگر t_n جمله n ام دنباله فیبوناچی و S_n مجموع n جمله اول دنباله باشد، به کمک روش استقرایی فرمولی برای S_n به‌دست می‌آوریم.

$$S_1 = 1 = 2 \times 1 + (0 - 1)$$

$$S_2 = 1 + 1 = 2 = 2 \times 1 + (1 - 1)$$

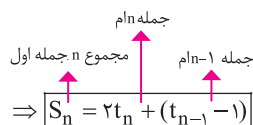
$$S_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = 2 \times 2 + (1 - 1)$$

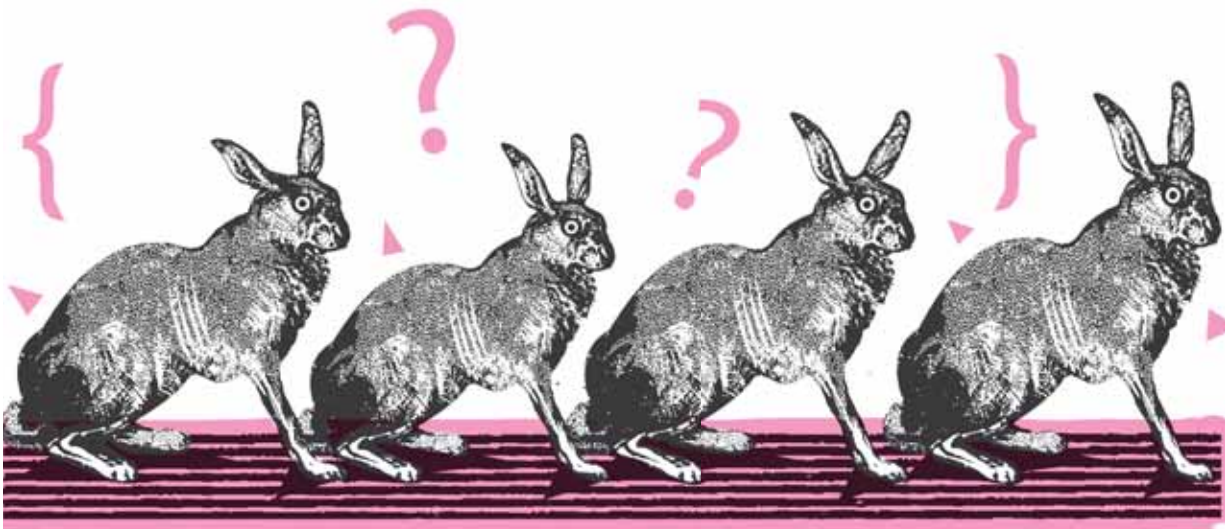
$$S_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = 2 \times 3 + (2 - 1)$$

$$S_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = 2 \times 5 + (3 - 1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n = 2 \times t_n + [t_{n-1} - 1]$$





ب) روش دیگری برای به دست آوردن مجموع جملات دنباله فیبوناچی می‌دانیم که جمله عمومی یک دنباله فیبوناچی را می‌توان به شکل‌های متفاوتی نمایش داد. یکی از این نوع نمایش‌ها به صورت مقابل است:

$$(*)t_{n+2} = t_{n+1} + t_n, n \geq 10$$

اگر در رابطه فوق اعداد حسابی ($n \geq 0$) را قرار دهیم، روابط زیر به دست می‌آیند که با جمع کردن نظیر به نظیر طرفین رابطه، جمله عمومی برای محاسبه مجموع n جمله اول دنباله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} t_{n+2} &= t_{n+1} + t_n \\ n=10 &\Rightarrow t_2 = t_1 + t_0 \Rightarrow x_2 - x_1 = t_1 \\ n=1 &\Rightarrow t_3 = t_2 + t_1 \Rightarrow x_3 - x_2 = t_2 \\ n=2 &\Rightarrow t_4 = t_3 + t_2 \Rightarrow x_4 - x_3 = t_3 \\ n=3 &\Rightarrow t_5 = t_4 + t_3 \Rightarrow x_5 - x_4 = t_4 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ n=n &\Rightarrow t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = t_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -t_1 + t_{n+2} &= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n+1} \quad t_1=1 \\ \Rightarrow t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n+1} &= t_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

مثال ۲. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله فیبوناچی را از دو روش فوق به دست آورید.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, 54, 87$$

محاسبه ۱۰ جمله اول دنباله به روش اول:

$$\begin{aligned} S_{10} &= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{10} = 2t_{10} + (t_9 - 1) \\ &= 2(33) + (21 - 1) = 66 + 20 = 86 \end{aligned}$$

محاسبه ۱۰ جمله اول دنباله به روش دوم:

$$S_{10} = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{10} = t_{12} - 1 = 87 - 1 = 86$$

نکته: در دنباله فیبوناچی، علاوه بر اینکه می‌توان مجموع n جمله اول را به دست آورد، می‌توان روابط کلی دیگری مانند محاسبه مجموع n جمله اول فرد، مجموع n جمله اول زوج و مجموع مربعات جملات را به دست آورد که در ادامه به ارائه الگوهای کلی برای موارد ذکر شده می‌پردازیم:

ج) روش محاسبه مجموع n جمله اول فرد متوالی دنباله فیبوناچی

اگر در رابطه (*) مقادیر زوج را برای n انتخاب کنیم، رابطه‌های بازگشتی زیر به دست می‌آیند که با جمع کردن نظیر به نظیر آن‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow t_0 = t_1 + t_0 \Rightarrow t_0 - t_1 = t_1 \\ n=2 &\Rightarrow t_2 = t_1 + t_0 \Rightarrow t_2 - t_1 = t_0 \\ n=4 &\Rightarrow t_4 = t_3 + t_2 \Rightarrow t_4 - t_3 = t_2 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ n=n &\Rightarrow t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \Rightarrow t_{n+2} - t_{n+1} = t_n \end{aligned}$$

$$-t_1 + t_2 = t_1 + t_0 + \dots + t_{n-1} \Rightarrow \boxed{t_1 + t_3 + \dots + t_{n-1} = t_n}$$

مثال ۳. مجموع 10 جمله اول فرد دنباله فیبوناچی را به دست آورید.

$$\begin{aligned} t_1 + t_3 + t_5 + t_7 + t_9 + t_{11} + t_{13} + t_{15} + t_{17} + t_{19} \\ = t_{20} = t_{10} = 4081 \end{aligned}$$

د) روش محاسبه مجموع n جمله اول زوج متوالی دنباله فیبوناچی

اگر در رابطه (*) مقادیر فرد را برای n انتخاب کنیم، رابطه‌های بازگشتی زیر به دست می‌آیند که با جمع کردن طرفین به رابطه مورد نظر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow t_2 = t_1 + t_0 \Rightarrow t_2 - t_1 = t_0 \\ n=3 &\Rightarrow t_4 = t_3 + t_2 \Rightarrow t_4 - t_3 = t_2 \\ n=5 &\Rightarrow t_6 = t_5 + t_4 \Rightarrow t_6 - t_5 = t_4 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ n=n &\Rightarrow t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \Rightarrow t_{n+2} - t_{n+1} = t_n \end{aligned}$$

$$t_{n+1} + t_1 = t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_n$$

$$\boxed{t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_n = t_{n+1} - 1}$$

مثال ۴. مجموع 10 جمله اول زوج دنباله فیبوناچی را به دست آورید.

$$\begin{aligned} t_2 + t_4 + t_6 + t_8 + t_{10} + t_{12} + \dots + t_{20} \\ = t_{21} - 1 = 6465 - 1 = 6464 \end{aligned}$$

***منبع...**

ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ج ۱)، تألیف گریمالدی، ترجمه دکتر محمدعلی رضوانی و دکتر بیژن شمس.